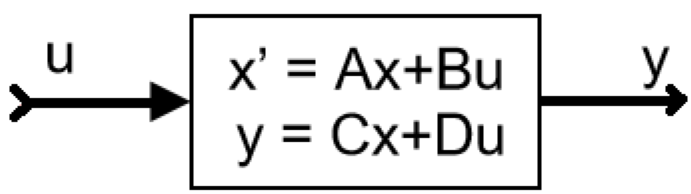
Diseño de Controladores por Retroalimentación de Estados

Para los casos en donde un sistema inestable se quiera llevar hacia la estabilidad.

Se utiliza asignación de polos (colocación de polos) del sistema.

Esta acción se realizará mediante el diseño de un controlador por retroalimentación de estado en la entrada del sistema.

Sistema de lazo abierto



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

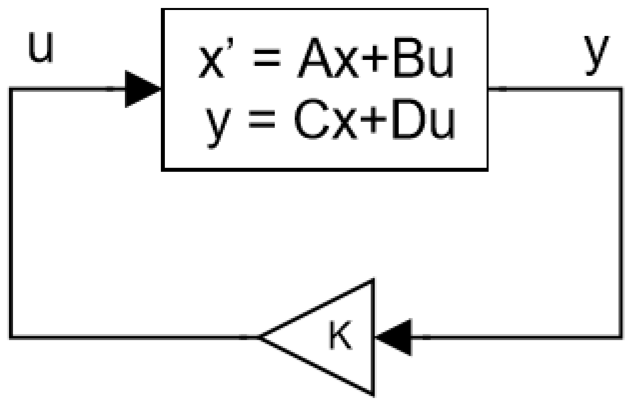
No existe retroalimentación de la salida hacia la entrada $B = 0$

El control no está dado como una función de la salida del sistema

$u = 0.$

$\dot{x} = Ax + Bu$ La matriz en lazo abierto será A

Lazo Cerrado



$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad u = Kx$$

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)\,x$$

Se cierra el lazo de retroalimentación de la salida-entrada $u = Kx$, donde K es una matriz de ganancias $K \in R^{1xn}$ que multiplican a cada una de las variables de estado $x \in R^{nx1}$.

En general $u = Kx$, pero si $y = x$, $u = Kx$, $y = Cx$, $C = I$

La matriz de lazo cerrado del sistema de esta manera es, la ecuación de estado de lazo cerrado es:

$$A_c = A + BK$$

Diseño de un Controlador por Realimentación de Estado

1. Verificar si el sistema es controlable.

2. Obtener la ecuación característica del sistema y sus valores propios.

3. Expresar la matriz de lazo cerrado Ac y su ecuación característica.

4. Determinar ecuación característica deseada polos deseados.

5. Encontrar las ganancias de retroalimentación K por asignación de polos.

Igualar términos similares de la ecuación característica de lazo cerrado y deseada.

Resolver para las ganancias de retroalimentación K desconocidas

6. Escribir el control por retroalimentación de estado $u = Kx$ y comprobar.

Ejemplo 1

Suponer que se tiene el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

Determinar la ecuación característica del sistema

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (s-1)(s-2) - 1 = 0$$

$$= s^2 - 3s + 1 = 0$$

$$s_1 = 2.618 \qquad y \qquad s_2 = 0.382$$

$$\therefore \, el \; sistema \; es \; inestable$$

El sistema expresado en la ecuación de estado anterior es equivalente a

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

pregunta pensar: ¿cómo se puede hacer que este sistema sea estable?

Respuesta: no es posible estabilizarlo sin disponer de una entrada u.

Para tratar de estabilizar es necesaria una matriz de entrada

$B \neq [0 \quad 0]$

Por ejemplo, podemos considerar el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

el cual sabemos de antemano que es inestable (matriz A).

La diferencia es que cuando aparece la entrada u existe la posibilidad de alterar esta propiedad del sistema utilizando una entrada $u = Kx$ $u = -Kx = -[k_1 \quad k_2]$.

Controlabilidad

Si deseamos colocar los polos, tal que sistema sea estable, la condición necesaria es Controlabilidad ∴ verificar que el sistema es controlable.

Se verifica que el sistema si es controlable y que se satisface la condición para asignar los polos en posiciones nuevas mediante un controlador.

Siguiente paso: considerar el sistema en lazo cerrado y efectuar diseño de control.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = [k_1 \quad k_2]$$

El procedimiento dice que hay que obtener la ecuación de estado en lazo cerrado y la matriz del sistema en lazo cerrado A_c

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = Ax - BKx = (A - BK)x$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]\right) x = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) x$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

Matriz a lazo cerrado

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

Siguiente paso: realizar asignación de polos de acuerdo a los valores deseados.

Asignación de polos

Polos de lazo cerrado se determinan por medio de ecuación característica de Ac

$$|sI - A_c| = \begin{vmatrix} s - (1 - k_1) & -1 + k_2 \\ -1 & s - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (s - 2)\big(s - (1 - k_1)\big) - (-1)(-1 + k_2) = 0$$

$$= s^2 - [(1-k_1)+2]s + (-1+k_2) + 2(1-k_1) = 0$$

$$= s^2 + (k_1 - 3)s - (1 - 2k_1 + k_2) = 0$$

Diseñe un control por retroalimentación de estado (buscar k1 y k2) y asumiendo que se desea los polos de este sistema en s =−5 y s =−6.

1. Obtener la ecuación característica del sistema con dichos valores multiplicando los factores correspondientes a cada uno de ellos.

Ecuación característica de polos deseados (deseada).

$$(s+5)(s+6) = 0$$

$$s^2 + 11s + 30 = 0$$

2. Comparar con la ecuación característica del sistema en lazo cerrado

$$s^2 + (k_1 - 3)s - (1 - 2k_1 + k_2) = 0$$

Comparando términos similares, se obtienen $k_1\ y\ k_2$

$$k_1 - 3 = 11$$

$$k_1 = 14$$

$$1 - 2(14) + k_2 = 30$$

$$k_2 = 37$$

$$K = \begin{bmatrix} 14 & 57 \end{bmatrix}$$

Las ganancias calculadas hacen que el sistema sea estable con polos en los lugares deseados mediante una retroalimentación de estado $u = -Kx$.

Ejemplo 2

Hay casos en el que el sistema es estable, pero se quiere una respuesta del estado más dinámica.

Suponga que se tiene un sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Se desea colocar los polos en $s = -7 \;\; y \, s = -5$

Determinado la ecuación característica

$$|sI - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(s-1)(s+3) - (-4) = 0$$

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$s_1 = -1 \quad y \quad s_2 = -1$$

$$\therefore el\ sistema\ es\ estable$$

Controlabilidad

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} B & BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Calcular la ecuación de lazo cerrado

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = Ax - BKx = (A - BK)x$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) x = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix}\right) x$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 - 2k_1 & -3 - 2k_2 \end{bmatrix} x$$

Entonces la matriz de laza cerrado

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 - 2k_1 & -3 - 2k_2 \end{bmatrix}$$

Obtener la ecuación característica de lazo cerrado

$$|sI - A_c| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4+2k_1 & s-3+2k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(s-1)(s+3+2k_2) + (4+2k_1) = 0$$

$$s^2 + 3s + 2k_2 s - s - 3 - sk_2 + 4 + 2k_1 = 0$$

$$s^2 + (2+2k_2)s + 1 + 2k_1 - 2k_2 = 0$$

Ecuación característica de los polos deseados

$$(s-5)(s-7) = 0$$

$$s^2 + 12s + 35 = 0$$

Comparando términos similares en ambas ecuaciones

$$2 + 2k_2 = 12$$

$$k_2 = 5$$

$$1 + 2k_1 - 2(5) = 35$$

$$k_1 = 22$$

$$K = \begin{bmatrix} 22 & 5 \end{bmatrix}$$

$$u = -kx = -\begin{bmatrix} 22 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -22x_1 - 5x_2$$

Ejemplo 3

Suponga que se tiene un sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diseñar un controlador por retroalimentación de estado para asignar los polos en

$$s = -2 + 4j, \qquad s = -2 - 4j \qquad y \quad s = -10$$

Matriz de Controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} A & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A\,A\,B = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -31 \end{bmatrix}$$

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -31 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = Ax - BKx = (A - BK)x$$

$$A_c = A - BK$$

$$= (\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3])x$$

$$= (\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix})x$$

$$= (\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -5 - k_2 & -6 - k_3 \end{bmatrix})x$$

Matriz de lazo cerrado

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -5 - k_2 & -6 - k_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica de lazo cerrado

$$|sI - A_c| = s\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1-k_1 & -5-k_2 & -6-k_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}s & -1 & 0\\0 & s & -1\\1-k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3\end{bmatrix} = 0$$

$$= s^2(s+6+k_3) + 1 + k_1 + 0 - \big(0 - s(5+k_2)\big) = 0$$

$$= s^3 + s^2(6+k_3) + s(5+k_2) + 1 + k_1 = 0$$

Calcular la ecuación característica deseada

$$(s+10)(s+2-j4)(s-2-j4) = 0$$

$$s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0$$

$$k_3 = 8 \qquad k_2 = 55 \qquad y \quad k_1 = 199$$

El controlador que coloca los polos del sistema en lazo cerrado es

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -199x_1 - 55x_2 - 8x_3$$