Álgebra Lineal - Parte 1

TRANSFORMACIONES

Lineales

TRANSFORMACIONES

Lineales

Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es una función entre espacios vectoriales que cumple dos propiedades fundamentales:

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$ (Aditividad)
- $T(cv) = cT(v)$ (Homogeneidad)

Estas propiedades garantizan que T preserva las operaciones vectoriales básicas.

Propiedades Fundamentales

03

Aditividad: T(u + v) = T(u) + T(v)
La transformación de una suma es igual a la suma de las transformaciones.
Ejemplo: Si T(x,y) = (2x, 3y), entonces T((1,2)+(3,1)) = T(4,3) = (8,9) = T(1,2) + T(3,1)

03

Homogeneidad: T(cv) = cT(v)
La transformación de un escalar por un vector es igual al escalar por la transformación. Ejemplo: Si T(x,y) = (2x, 3y), entonces T(2·(1,2)) = T(2,4) = (4,12) = 2·T(1,2)

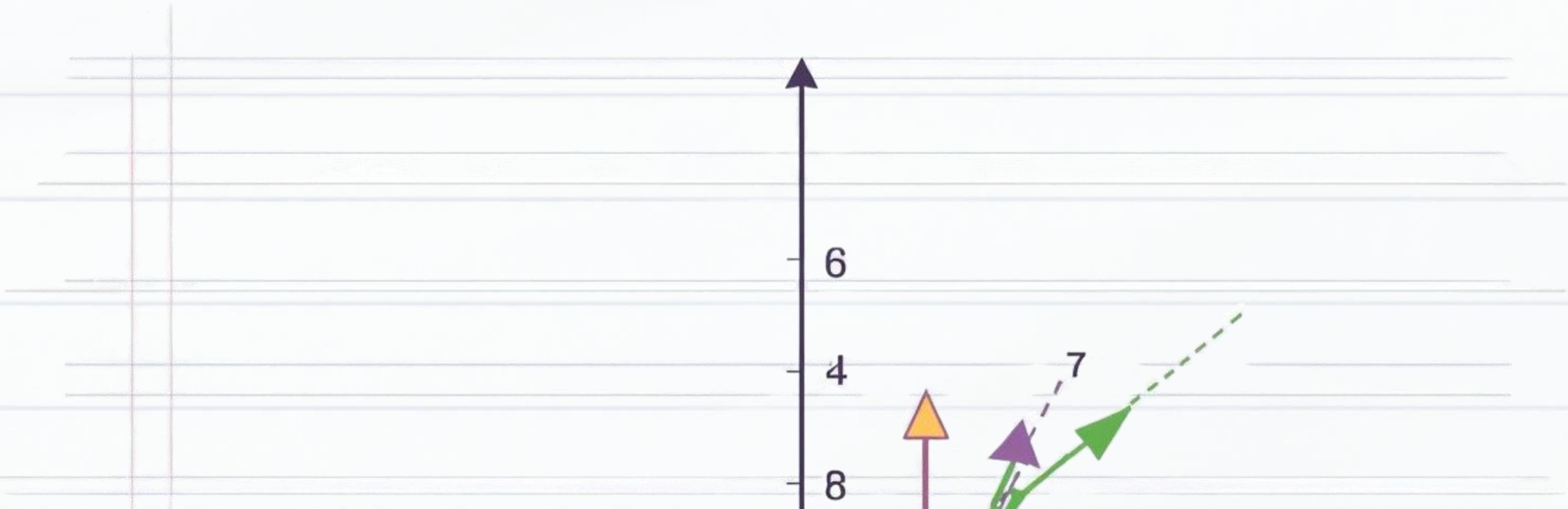
INTERPRETACIÓN

Geométrica

Las transformaciones lineales preservan dos propiedades fundamentales:

- Líneas rectas: Una línea recta siempre se transforma en otra línea recta
- El origen: El punto (0,0) siempre permanece fijo

Ejemplo: Si T rota un plano 90°, una línea diagonal se convierte en otra línea diagonal, nunca en una curva.



EJEMPLO 1

Escalamiento en R^2

$T(x,y) = (2x, 3y)$

Si aplicamos T al vector (1,2):

$T(1,2) = (2 \cdot 1, 3 \cdot 2) = (2, 6)$

El vector se escala: x se duplica, y se triplica.

Esta es una transformación lineal válida.

Ejemplo 2: Rotación

90°

La transformación T(x,y) = (-y, x) rota vectores 90° en sentido antihorario.

Ejemplo práctico:

Si v = (3, 2), entonces:

T(3, 2) = (-2, 3)

El vector original (3,2) se convierte en (-2,3), rotado 90° respecto al origen.

EJEMPLO 3

Reflexión

Reflexión respecto al eje x:

T(x,y) = (x, -y)

Ejemplo: Si v = (3, 4)

T(3,4) = (3, -4)

El punto se refleja hacia abajo del eje x, invirtiendo la coordenada y.

TRANSFORMACIÓN LINEAL

Cumple las dos propiedades:

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(cv) = cT(v)$

Ejemplo: $T(x,y) = (2x, 3y)$

$T[(1,2) + (3,1)] = T(4,3) = (8,9)$

$T(1,2) + T(3,1) = (2,6) + (6,3) = (8,9)$ ✓

TRANSFORMACIÓN NO LINEAL

NO cumple al menos una propiedad:

- Aditividad o
- Homogeneidad

Ejemplo: $T(x,y) = (x^2, y)$

$T[(1,1) + (2,1)] = T(3,2) = (9,2)$

$T(1,1) + T(2,1) = (1,1) + (4,1) = (5,2)$ X

Como $9 \neq 5$, no es lineal.

TIPOS DE

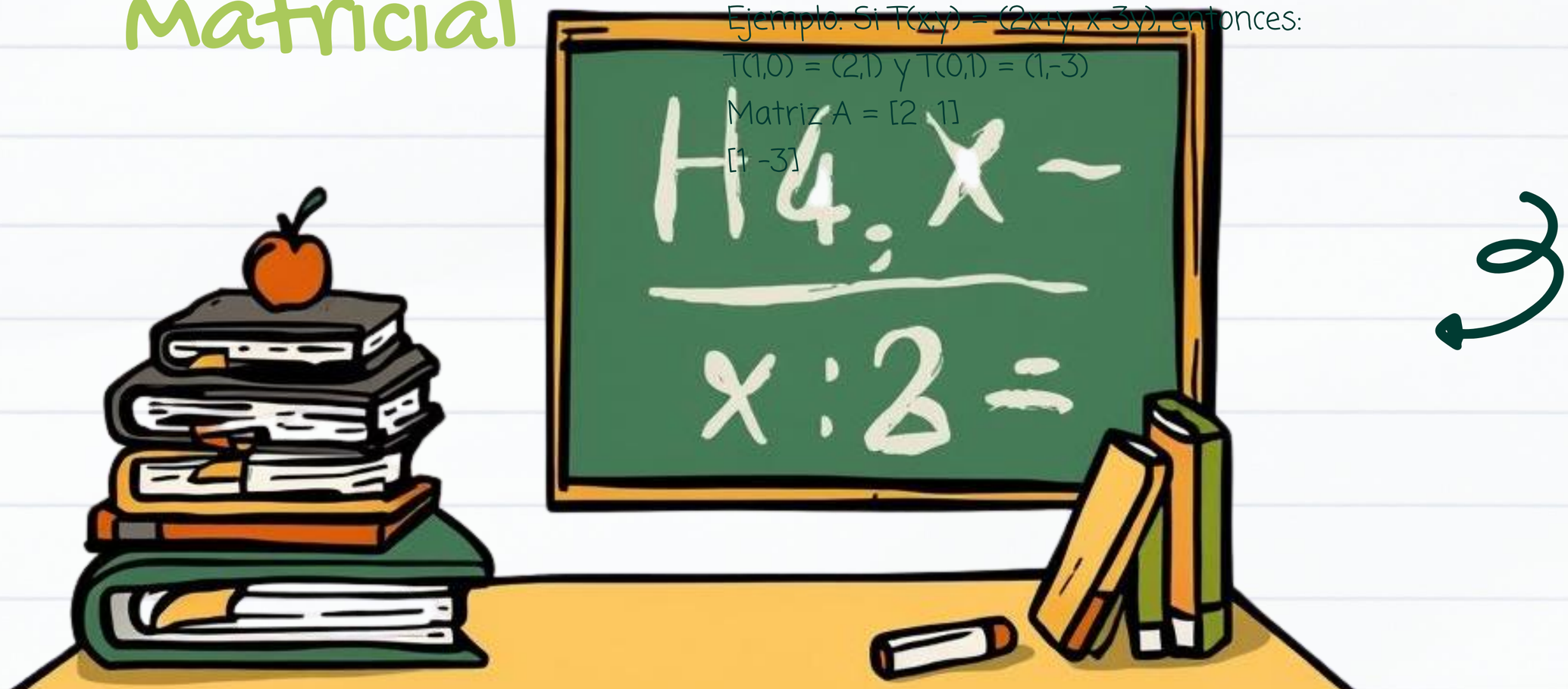
Transformaciones

1. Rotación
2. Reflexión
3. Escalamiento
4. Proyección
5. Cizallamiento

REPRESENTACIÓN

Matricial

Toda transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ puede representarse mediante una matriz A de tamaño m×n.
Si T(x) = Ax, la matriz A se construye aplicando T a los vectores de la base canónica:
$A = [T(e_1) \mid T(e_2) \mid \ldots \mid T(e_n)]$
Ejemplo: Si T(x,y) = (2x+y, x-3y), entonces:
T(1,0) = (2,1) y T(0,1) = (1,-3)
Matriz A = [2 1]
[1 -3]



EJEMPLO 4

Matriz de Transformación

Aplicar la matriz A = [2,0; 0,3] al vector v = (1,2)

Solución:

A·v = [2,0; 0,3] · [1; 2] = [2·1+0·2; 0·1+3·2] = [2; 6]

El vector (1,2) se transforma en (2,6): se estira 2x en x y 3x en y.

Conceptos Clave

12

Núcleo (Kernel): Es el conjunto de todos los vectores v del dominio tales que $T(v) = 0$. $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$. Ejemplo: Si $T(x,y) = (x+y, 0)$, entonces $\text{Ker}(T) = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$.

12

Imagen: Es el conjunto de todos los vectores w en el codominio que son resultado de aplicar T. $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$. Ejemplo: Si $T(x,y) = (x+y, x-y)$, entonces $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ (toda la transformación es sobreyectiva).

EJEMPLO 5

Composición

Rotación 90° seguida de escalamiento por 2:

Si $v = (1, 0)$, primero rotamos: $R(v) = (0, 1)$

Luego escalamos: $S(R(v)) = (0, 2)$

La composición $(S \circ R)(v) = S(R(v)) = (0, 2)$

"Una transformación T es lineal si y solo si T(au + bv) = aT(u) + bT(v) para todos los vectores u, v y todos los escalares a, b."
Este teorema unifica las dos propiedades de linealidad en una sola condición elegante y práctica.

Conclusión

Parte 1: Transformaciones Lineales

En esta primera parte hemos aprendido:

- Definición: $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
- Propiedades fundamentales: $T(0) = 0$, linealidad
- Ejemplos: rotaciones, reflexiones, proyecciones
- Toda transformación lineal tiene matriz asociada
- La matriz se construye con $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$

Álgebra Lineal - Transformaciones Lineales Parte 1

¡GRACIAS!

Continúa con la Parte 2